Do wykorzystania na lekcjach:
matematyki, geografii, historii.

Warszawskie rozmiary

Maciej Falkowski

WIDZĘ

Przeglądam fotomapę Warszawy. Odnajduję obiekty znane mi z codziennych spacerów po mieście. Z góry wyglądają inaczej, dzięki czemu tworzę w pamięci wiele nowych wzorców obrazowych.

ANALIZUJĘ

Rozpoznaję nie tylko pojedyncze obiekty, ale również ich usytuowanie i wzajemne relacje. Identyfikuję układy przestrzenne, potrafię je nazwać. Dzięki obrazom satelitarnym oglądam nie tylko fasady mijanych budynków, ale także niedostępne mi na co dzień podwórka. Przestrzeń, którą widzę, ma swój wymiar – porównuję go z doznaniami z autopsji. Odczucia *bliżej-dalej* mają na fotomapie konkretną matematyczną miarę. W udostępnionym uczniom programie ArcGIS obliczam odległości i powierzchnie, a dzięki znajomości twierdzeń geometrii także wysokości budynków, choć fotomapa nie jest obrazem 3D.

Na obraz fotomapy wprowadzam dodatkowo czwarty wymiar – czas. Odkrywam, jakie zmiany w krajobrazie miasta dokonały się od momentu wykonania zdjęcia do chwili obecnej. Wykorzystuję wiedzę o Warszawie sprzed lat.

DZIAŁAM

Do opisu Warszawy wykorzystuję własności fotomapy, wiedzę z matematyki oraz historii miasta. Stawiam sobie zadania zależnie od posiadanej wiedzy i umiejętności poruszania się po mapie.

Część 1

Zadania

1. Zadanie wstępne na rozgrzewkę
2. Twierdzenie Talesa (poziom szkoły podstawowej)
3. Ciągi/szeregi liczbowe (poziom gimnazjum)
4. Elementy topologii w przestrzeniach metrycznych (poziom szkoły ponadgimnazjalnej)

Zadanie wstępne

Pokolenie Varsovia.pl

Patrzę na zdjęcie lotnicze wykonane w nowej i niedostępnej dla mnie na co dzień perspektywie. Staram się rozpoznać poszczególne budynki.

Odszukuję te z nich, które znajdują się na fotomapie z 2001 roku (lub na późniejszych jej wersjach). Na fotomapie zaznaczam punkt, nad którym w rzucie prostopadłym znajdował się obserwator w momencie wykonywania zdjęcia. Które budynki zostały wybudowane po 2001 roku? Które budynki zostały dobudowane po 2007 roku, czyli po wykonaniu zdjęcia?

Twierdzenie Talesa

Na fotomapie wyróżniam najwyższe budynki w Warszawie rozpoznane przeze mnie po najdłuższych cieniach. Na ich podstawie oraz znając lokalizację i orientację geograficzną obiektów staram się określić, o jakiej porze dnia zostało wykonane zdjęcie służące do stworzenia fotomapy. Wiedząc, że długości cieni (sfotografowanych w tym samym momencie) są proporcjonalne do wysokości obiektów, a wysokość Pałacu Kultury i Nauki to $H \approx 230$ m obliczam, jaka jest w przybliżeniu wysokość wieżowca Warszawskiego Centrum Finansowego (WFC) stojącego na rogu ulic E. Plater i Świętokrzyskiej. Mogę również wyliczyć wysokości innych obiektów, których długości cieni potrafię z niewielkim błędem zmierzyć na fotomapie.

Korzystając z załączonej niżej tabeli, wskazuję dyscyplinę sportową, której rozgrywki można prowadzić jednocześnie w największej liczbie na placach gry o powierzchni całkowitej nie większej niż pole cienia WFC (vide: rectangular cutting stock problem[1]). Którą dyscyplinę może uprawiać naraz największa liczba graczy na tak wytyczonych placach? Zakładam, że budynek WFC jest prostopadłościanem o podstawie 65 x 50 m (a x b), dozwolone obroty placów w stosunku do krawędzi cienia są wielokrotnościami kąta $\pi/2$ oraz promienie słońca w chwili obserwacji padają prostopadle do pary przeciwległych ścian (równolegle do drugiej pary).

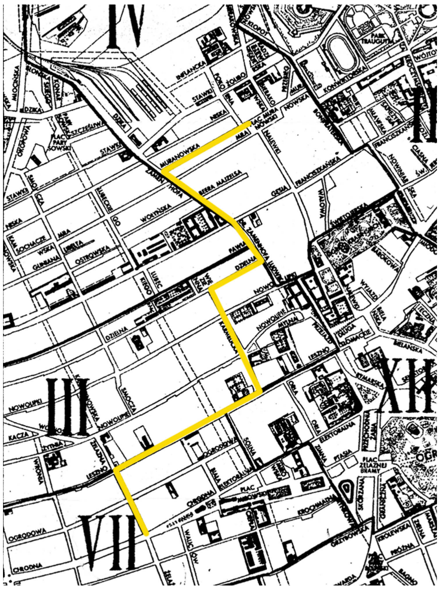
Jakie figury geometryczne może tworzyć cień budynku o różnych porach dnia? Zastanawiam się także jak zmieniają się wymiary cienia w różnych porach roku, np.: każdorazowo mierzone 5 h po wschodzie słońca. Jakie wyniki otrzymam, gdy dozwolone będą równoczesne rozgrywki różnych dyscyplin i/lub place gier będę obracał pod kątami innymi niż wielokrotności $\pi/2$?

Wymiary placów gier:

Dyscyplina sportowa	Długość placu [m]	Szerokość placu [m]
piłka ręczna	40	20
piłka nożna	100-110	64-76
koszykówka [FIBA]	28	15
siatkówka	18	9
siatkówka plażowa	16	8
hokej na lodzie	61	30
waterpolo	30	20
badminton	13,4	6,1
tenis [debel/mikst]	26 yd*	12 yd*
tenis [singiel]	26 yd*	9 yd*

*1 yd (jard) = 0,9144 m

Ciągi/szeregi liczbowe



Rok 1941. Warszawskie getto. Trasa linii ✡: PL. MURANOWSKI – Muranowska – Dzika – Dzielna – Karmelicka – Leszno – Żelazna – ŻELAZNA/CHŁODNA (źródła: plan i fotoplan – Archiwum Państwowe m.st. Warszawy; trasa – trasbus.com).

Dwa tramwaje linii ✡ znajdowały się w odległości 3 km od siebie. Jeden stał na pl. Muranowskim, drugi – na rogu ulic Żelaznej i Chłodnej. W chwili t_0 ruszyły ku sobie i osiągnęły stałą prędkość

5 km/h. Z powodu naprawy torowiska oba pojazdy podążały po tej samej parze szyn. Były to jedyne tramwaje na trasie. W chwili początkowej mucha wystartowała z przedniego reflektora tramwaju jadącego z pl. Muranowskiego i poleciała ze stałą prędkością 10 km/h na spotkanie z drugim tramwajem.

Róg ul. Leszno (dziś Al. Solidarności) i Żelaznej – tramwaj skręcający w Żelazną

Róg ul. Leszno (dziś Al. Solidarności) i Karmelickiej – tramwaj jadący na Wolę

Doleciała do niego, po czym zawróciła i ruszyła na spotkanie z pierwszym. Gdy już do niego dotarła, to ponownie zawróciła i kursowała tak do czasu, aż stała się świadkiem kolizji między przednimi wagonami obu pojazdów. Jaką odległość pokonała mucha oraz ile czasu poświęciła na latanie od chwili wyruszenia tramwajów, aż do ich kolizji?

Zakładam, że:
- mucha leciała nad torami, dokładnie trasą tramwajową;
- tramwaje oraz mucha na całej trasie poruszały się ze stałą prędkością;
- tramwaje nie zatrzymywały się na przystankach na trasie, tzn. jedynymi miejscami postoju były przystanki skrajne.

Elementy topologii w przestrzeniach metrycznych

Korzystając z planu lub fotomapy w Obrazowej Bazie Danych obliczam, jaką odległość pokonam przemieszczając się spod Pałacu Kultury i Nauki w Warszawie do pałacu w Wilanowie. Odległość mierzę na ortodromie i loksodromie (za model powierzchni Ziemi przyjmuję kulę) oraz porównuję z wielkościami otrzymanymi po zastosowaniu metryk w $\mathbb{R}^2$:

a) euklidesowej

b) taksówkowej (miejskiej)

c) maksimum

W tych samych miarach obliczam odległość dwóch miejsc w Warszawie (A i B), których współrzędne wynoszą $A = (\lambda_1, \phi), B = (\lambda_2, \phi)$, gdzie $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Co mogę powiedzieć o ich wzajemnym położeniu? Jaki wynik otrzymam dla dowolnych dwóch miejsc w stolicy leżących na tzw. Południku Warszawskim przecinającym m.in. plac Teatralny?

Część 2

Rozwiązania zadań

Twierdzenie Talesa

W zadaniu stosuję twierdzenie Talesa w wersji: stosunek wysokości PKiN do długości jego cienia jest równy stosunkowi wysokości do cienia stojącego w bliskim sąsiedztwie wieżowca Warszawskiego Centrum Finansowego.

Z zadania znam wysokość PKiN ($H \approx 230$ m). Na fotomapie mierzę długości padających cieni i oznaczam je odpowiednio symbolami L (dla PKiN) oraz l (dla WFC).

Następnie obliczam wysokość wieżowca WFC. Oznaczam ją literą h. Korzystam ze wspomnianego twierdzenia i ustalam proporcję:

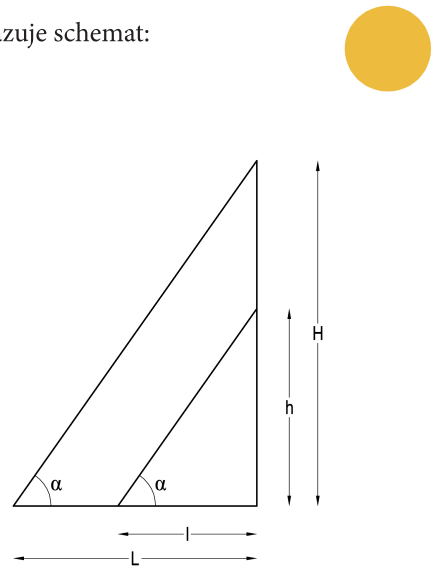
$$\frac{H}{L} = \frac{h}{l}$$

Na mocy powyższego otrzymuję, że:

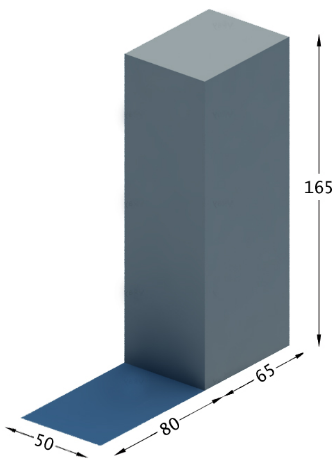
$$h = \frac{Hl}{L}$$

Wynik porównuję z rzeczywistą wysokością budynku. Wysokość bezwzględna PKiN wraz z iglicą wynosi 230,68 m (sam budynek jest wyższy – ma głębokie podziemia). Jego wysokość od podstawy do iglicy to 187,8 m (iglica ma aż 43 m). Wysokość wieżowca WFC do dachu: 144 m, wysokość z anteną: 165 m.

Opisaną sytuację obrazuje schemat:



Cień WFC jest prostokątem o bokach długości l oraz krótszej podstawy budynku $b = 50$ m – równoległej do ulicy E. Plater (rysunek poniżej).



W tej części zadania zakładam, że znam wysokości budynków PKiN oraz WFC równe odpowiednio: 230 m i 165 m, a zmierzony cień PKiN ma długość L = 111,5 m. Aby wyznaczyć pole cienia WFC obliczam, korzystając z twierdzenia Talesa, że l = 80 m. Aby wskazać dyscyplinę, dla której w polu cienia WFC można skoncentrować największą liczbę placów do gier, obliczam:

a) pole powierzchni cienia:
$S_{cienia} = l \cdot b = 80\text{ m} \cdot 50\text{ m} = 4000\text{ m}^2$
b) pola placów:

Dyscyplina sportowa	Pole placu[m²]	Liczba placów	Liczba graczy w meczu	Łączna liczba graczy
piłka ręczna	800	4	14	56
piłka nożna	6400-8360	0	22	0
koszykówka [FIBA]	420	7	10	70
siatkówka	162	20	12	240
siatkówka plażowa	128	30	4	120
hokej na lodzie	1830	1	12	12
waterpolo	600	6	14	84
badminton	81,74	48	2	96
tenis [debel/mikst]	260,76	14	4	56
tenis [singiel]	195,63	20	2	40

W polu cienia można naraz rozegrać maksymalnie 48 meczów badmintona (w sumie w grach może uczestniczyć 96 zawodników tej dyscypliny; zakładam, że np. z braku dostatecznej liczby rakiet mecze deblowe badmintona nie są rozgrywane). Najwięcej sportowców może równocześnie grać w siatkówkę (240 zawodników na 20 boiskach). Zauważam, iż szacując całkowitą liczbę placów do gier nie należy brać pod uwagę jedynie ich pól powierzchni, ale także wymiary! Przykład: na działce o wymiarach 200×20 m mieści się 5 boisk o wymiarach 40×20 m, ale na powierzchni cienia WFC tzn. 80×50 m już tylko 4 całe, choć jeden i drugi obszar zajmuje taką samą powierzchnię, tj. 4000 m².

Zauważam ponadto, że wraz z upływającym czasem (ruchem Ziemi) zmienia się pole oraz kształt cienia, a co za tym idzie liczba dostępnych placów do gry. Im dłuższy jest całkowity czas rozgrywki danej dyscypliny (liczony wraz ze wszystkimi przerwami), tym większa jest obserwowana skala tego zjawiska np. 70 min (2x30 min + 10 min przerwy) dla piłki ręcznej, 37 min (4x8 min + 5 min) dla piłki wodnej itd.

Przy założeniu równoległości promieni słonecznych możliwe są następujące kształty cienia budynku będącego prostopadłościanem: prostokąt i sześciokąt o parach równoległych boków.

Ciągi/szeregi liczbowe
Pierwszy sposób rozwiązania

Z treści zadania wiem, że:
$V_m = 10\frac{km}{h}$ – prędkość muchy, $V_T = 5\frac{km}{h}$ – prędkość tramwaju,
$S = 3$ km – odległość pl. Muranowskiego od skrzyżowania ulic Żelaznej i Chłodnej mierzona wzdłuż toru.
S_m (S_T) – droga przebyta przez muchę (tramwaj) w czasie t_i, i = 1, 2, ...
Otrzymuję układ równań (korzystam ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym $V = \frac{S}{t}$):

$$\begin{cases} S = S_T + S_m = 3 = 15t \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5}h \\ S_T = 5t \Rightarrow S_T = 1km \\ S_m = 10t \Rightarrow S_m = 2km \end{cases}$$

w czasie $t_1 = \frac{1}{5}h = 12\text{min}$

Zatem po 12 minutach mucha przeleci 2 km i doleci do tramwaju jadącego z ulicy Chłodnej. Każdy tramwaj pokona w tym czasie 1 km. Zauważam, że droga je teraz dzieląca wyniesie także 1 km.

Konstruuję nowy układ równań na chwilę t_2:

$$\begin{cases} S = S_T + S_m = 1 = 15t \Rightarrow t_2 = \frac{1}{15}h \\ S_T = 5t \Rightarrow S_T = \frac{1}{3}km \\ S_m = 10t \Rightarrow S_m = \frac{2}{3}km \end{cases}$$

w czasie $\mathrm{t}_2 = \frac{1}{15}h = 4\mathrm{min}$

Po następnych 4 minutach mucha przeleci kolejne $\frac{2}{3}\mathrm{km}$ zanim doleci do tramwaju, z którego wystartowała. Każdy tramwaj pokona dodatkowe $S_T = \frac{1}{3}\mathrm{km}$. Również i tym razem droga je dzieląca wyniesie tyle samo, ile każdy z nich przebył w ostatnio mierzonym odcinku czasu.

Konstruuję nowy układ równań na chwilę t_3:

$$\begin{cases} S = S_T + S_m = \frac{1}{3} = 15t \Rightarrow t_3 = \frac{1}{45}h \\ S_T = 5t \Rightarrow S_T = \frac{1}{9}km \\ S_m = 10t \Rightarrow S_m = \frac{2}{9}km \end{cases}$$

w czasie $\mathrm{t}_3 = \frac{1}{45}h = 1,333\mathrm{min}\ (80\mathrm{sek})$

Po kolejnych 80 sekundach mucha przeleci $\frac{2}{9}$km i po raz drugi spotka tramwaj jadący z ulicy Chłodnej. Każdy tramwaj pokona dodatkowe $S_T = \frac{1}{9}$ km.

Podobne rozumowanie przeprowadzam dla kolejnych chwil: $t_4,\ t_5,\ t_6, \ldots$

Droga [w km] pokonana przez muchę w kolejnych międzyczasach wyniesie zatem:

$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9}, \ldots$

Dostrzegam, że drogi te tworzą ciąg sum częściowych ciągu geometrycznego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_1q$
$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$
......
$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}$
......

co zapisuję jako:

$a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$, gdzie:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Z twierdzenia o zbieżności szeregu geometrycznego – dowód dla chętnych (wskazówka: należy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $(a^n - b^n)$ oraz zbieżności ciągu $\lim_{n\to\infty} q^n$ dla $|q| < 1$) – wiem, że: ciąg sum częściowych (S_n) ciągu geometrycznego jest zbieżny i ma granicę $S \Leftrightarrow |q| < 1$ i wówczas $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$.

Dostrzegam także, że kolejne cząstkowe czasy przelotu muchy od tramwaju do tramwaju tworzą również ciąg sum częściowych ciągu geometrycznego postaci:

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$, gdzie:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5}h \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem od chwili wyruszenia obu tramwajów na trasę, aż do ich bezpośredniego kontaktu, upłynął czas t = 0,3 h = 18 min.

Całkowita droga przebyta przez muchę to:

$$S_{calk_m} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3 \text{ km}$$

(tyle samo, ile wynosiła trasa linii tramwajowej z placu Muranowskiego do ulicy Chłodnej).

Drugi sposób rozwiązania

Zauważam, że droga pokonana przez muchę jest równa iloczynowi czasu, który upłynie do zderzenia tramwajów (jadących ze stałą prędkością) oraz prędkości lecącej muchy, czyli:

$$S_{calk_m} = 0{,}3 \text{ h} \cdot 10 \text{ km/h} = 3 \text{ km}$$

Wskazówka: Tramwaje jadąc ze stałą prędkością 5 km/h spotkają się w połowie trasy, czyli po przejechaniu 1,5 km. Drogę tę każdy z nich przebędzie więc w czasie t = 0,3 h, czyli w ciągu 18 minut. Zaznaczam to miejsce na mapie i jednocześnie na podstawie zdjęć lotniczych z tamtego okresu – m.in. analizując fotomapę i zdjęcia naziemne z poprzednich stron – staram się wyobrazić, jak ono wyglądało w momencie kolizji pojazdów.

Uwaga: Choć opisana w zadaniu sytuacja tworzy nieskończony ciąg zdarzeń, w których droga wyrażona jest przez nieskończony szereg geometryczny, to suma tego szeregu jest skończona, więc i czas do wydarzenia (kolizja tramwajów) jest także skończony.

Przypominam sobie również pokrewne paradoksy ruchu Zenona z Elei: dychotomii, Achillesa, strzały i stadionu – miały one ukazać trudność w rozumieniu czasu i przestrzeni jako wielkości ciągłych, które można dzielić w nieskończoność oraz tym samym wykazać, że postrzeganie ruchu jest jedynie złudzeniem i w rzeczywistości nie jest możliwe.

Elementy topologii w przestrzeniach metrycznych

Obok użycia miar odległości punktów na sferze (metryka geometrii sferycznej) wykorzystam fakt, iż w porównaniu z obwodem koła wielkiego Ziemi pałace dzieli niewielka odległość. Policzę metryki a)-c), tzn. założę, że cięciwa i łuk koła Ziemi łączące te punkty mają tą samą długość.

Najpierw odczytuję z mapy, stosując odpowiednie narzędzia programu ArcGIS, współrzędne geograficzne interesujących mnie obiektów. Za współrzędne PKiN (mierzone dla pozycji iglicy, którą przyjmuję za jego centrum) biorę:

$$\phi = 52^o13'54''N, \lambda = 21^o00'23''E$$

zaś za współrzędne pałacu w Wilanowie:

$$\phi = 52^o09'54''N, \lambda = 21^o05'22''E$$

Minuty i sekundy współrzędnych wyrażam jako ułamki stopnia geograficznego:

Pałac Kultury i Nauki:

$$\phi = 52^o13'54''N = (52 + \frac{13}{60} + \frac{54}{3600})^oN \approx 52,231667^oN$$

$$\lambda = 21^o00'23''E = (21 + \frac{23}{3600})^oE \approx 21,006389^oE$$

Pałac w Wilanowie:

$$\phi = 52^o09'54''N = (52 + \frac{9}{60} + \frac{54}{3600})^oN \approx 52,165^oN$$

$$\lambda = 21^o05'22''E = (21 + \frac{5}{60} + \frac{22}{3600})^oE \approx 21,089444^oE$$

Odległość na ortodromie obliczam ze wzoru cosinusów:

$d_L = \arccos(\sin\phi_{PKiN}\sin\phi_{Wilanów} + \cos\phi_{PKiN}\cos\phi_{Wilanów}\cos(\lambda_{Wilanów} - \lambda_{PKiN})) \cdot \frac{\pi R}{180^o} \approx 9.327$ km

Mogę wykazać (np. stosując MATLAB Mapping Toolbox), że gdyby za model Ziemi przyjąć elipsoidę/geoidę odległość po ortodromie okaże się większa, bo wyniesie ok. 9,342 km.

Definiuję metryki w ogólnej postaci a następnie zawężę do tych zaproponowanych w $\mathbb{R}^2$, tj. na mapie. Niech para $(\mathbb{X}, d)$ będzie przestrzenią metryczną, gdzie $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R} \cup \{0\}$ jest metryką, jeśli spełnia następujące warunki:

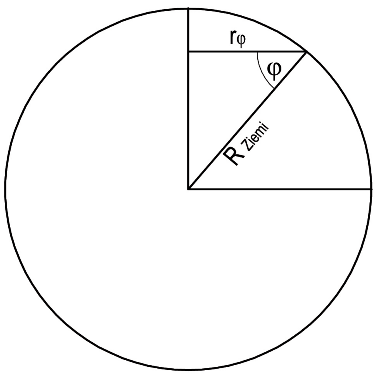
$1^o\ \forall x, y \in \mathbb{X} : d(x, y) \geqslant 0 \quad \wedge \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
$2^o\ \forall x, y \in \mathbb{X} : d(x, y) = d(y, x)$ (warunek symetrii)
$3^o\ \forall x, y, z \in \mathbb{X} : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (warunek trójkąta)

Metryka $d(x, y)$ to po prostu odległość między punktami *x* oraz *y* z przestrzeni $\mathbb{X}$.
Przykłady metryk:

$a)\mathbb{X} = \mathbb{R}$ i $d_R(x, y) = |x - y|$ - zwykła odległość na prostej
$b)\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ i $d_{R^2}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, gdzie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ - zwykła odległość na płaszczyźnie
$c)\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ i $d_T(x, y) = \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, gdzie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ - metryka taksówkowa
$d)\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ i $d_M(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2}|x_i - y_i| = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, gdzie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ - metryka maksimum
$e)\mathbb{X} = \mathbb{R}$ i $d_1(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ - inna metryka

Staram się udowodnić, że powyższe funkcje są faktycznie metrykami.

Na początek obliczam, ilu kilometrom odpowiada jeden stopień geograficzny na równiku oraz na dowolnym południku. Przyjmuję, że Ziemia jest kulą o promieniu *R* = 6371 km. Obwód koła powstałego przez przecięcie płaszczyzną równika Ziemi wynosi zatem $P = 2\Pi R \approx$ 40030 km. Stąd też 1° na równiku lub południku wynosi 40030 km/360 ≈ 111,19 km (dostrzegam, że wraz ze wzrostem szerokości geograficznej długość równoleżników maleje, natomiast długość południków pozostaje stała). Stąd też jeden stopień na dowolnym południku wynosi ≈ 111,19 km. Jeden stopień długości geograficznej na danym równoleżniku nie jest równy jednemu stopniowi na innym. Obliczam zatem, ile wynosi jeden stopień na równoleżniku przechodzącym przez PKiN oraz pałac w Wilanowie (rysunek poniżej):



Kąt między promieniem Ziemi a równoleżnikiem szerokości geograficznej

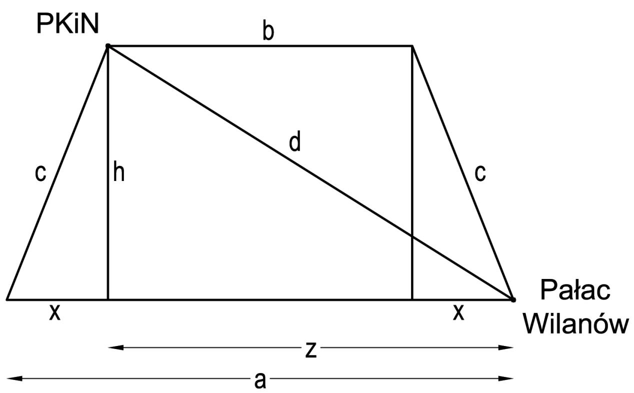
$$1^o_{\phi_{PKiN}} = \frac{2\Pi R_{równika}\cos\phi_{PKiN}}{360^o} = \frac{2\pi 6371km\cos 52{,}231667^o}{360^o} \approx 68,10358 \text{ km}$$
$$1^o_{\phi_{Wilanów}} = \frac{2\Pi R_{równika}\cos\phi_{Wilanów}}{360^o} = \frac{2\pi 6371km\cos 52{,}165^o}{360^o} \approx 68,2058 \text{ km}$$

Obliczona rozciągłość „równoleżnikowa" mierzona w stopniach na dowolnym południku wynosi: $\phi_{PKiN} - \phi_{Wilanów} \approx 0,066667^o$. Zatem rozciągłość „równoleżnikowa" zmierzona w kilometrach wynosi 0, 066667 · 111, 19 km ≈ 7, 4127 km.

Rozciągłość „południkowa" zmierzona w stopniach wynosi: $\lambda_{Wilanów} - \lambda_{PKiN} \approx 0,083055^o$. Zatem odległość „południkowa" mierzona w [km] na równoleżniku przechodzącym przez PKiN równa się 0, 083055 · 68, 10358 km ≈ 5, 6563 km.

Analogicznie, rozciągłość „południkowa" na równoleżniku przechodzącym przez pałac w Wilanowie wynosi 0, 083055 · 68, 2058 km ≈ 5, 6648 km.

Otrzymałem trapez równoramienny stanowiący przybliżenie trapezu sferycznego, w którym suma kątów wewn. > 360°. Jego podstawy to „odcinki" będące częściami równoleżników (choć mam świadomość, że równoleżniki to w rzeczywistości okręgi, nie proste!) przechodzące przez Wilanów i PKiN. Ich długości wynoszą odpowiednio: $a \approx 5,6648$ km oraz $b \approx 5,6563$ km. Ramię tak powstałego trapezu ma długość $c \approx 7,4127$ km i jest częścią południka. Z dłuższej podstawy wydzielam dwa tej samej długości „odcinki", każdy o długości $\mathrm{x} = \frac{a-b}{2}$ km ≈ 0, 00425 km.



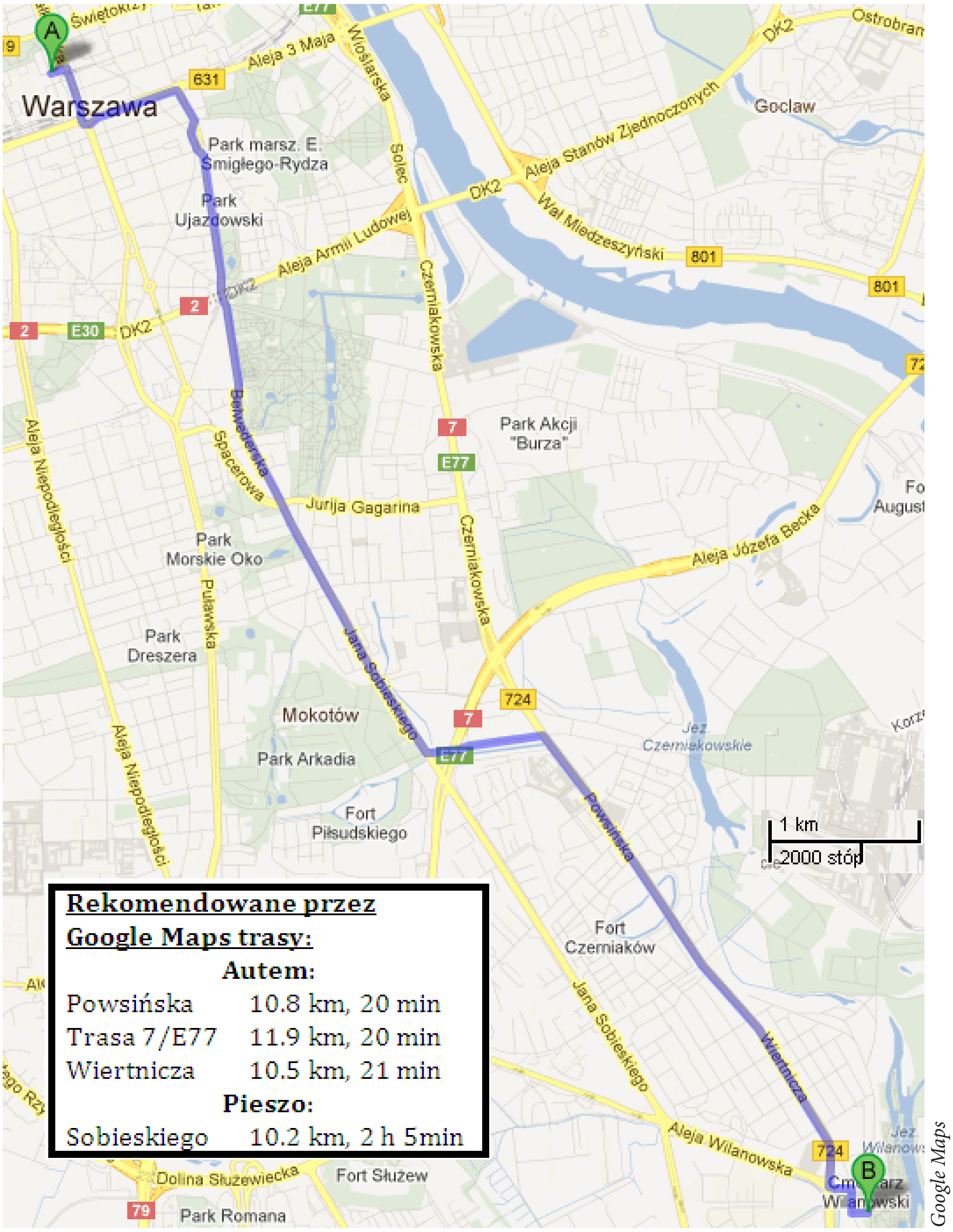
„Płaskie" (mapa) i zmierzone po ortodromie odwzorowanie drogi PKiN - Wilanów

Suma długości krótszej podstawy b oraz x jest równa $z \approx 5,66905$ km. Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wyliczam, że wysokość trapezu wynosi $h \approx 7,4127$ km.

Odległości wyrażone w metrykach a)-c) wyniosą zatem:

$$d_{R^2}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} = \sqrt{h^2+z^2} \approx 9,332 \text{ km}$$
$$d_T(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = |h| + |z| \approx 13,08175 \text{ km}$$
$$d_M(x,y) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|) = \max(|h|,|z|) \approx 7,4127 \text{ km}$$

Dostrzegam, iż z powyższych metryk odległość między PKiN a pałacem w Wilanowie najlepiej wyraża metryka taksówkowa (por. rys. str. 67). Zauważam, że metryka ta dobrze odwzorowuje odległości w mieście o układzie ulic przecinających się pod kątem prostym, na przykład w centrum Nowego Jorku. Odległość wyznaczona metryką euklidesową jest mało realna w przypadku topografii Warszawy. Mierząc nią na mapie odległości (długości odcinków) nie uwzględniam istnienia przeszkód w postaci budynków czy skomplikowanego układu ulic.



Odległość wyznaczona metryką euklidesową jest mało realna w przypadku topografii miasta. Odległość rzeczywistą między PKiN a pałacem w Wilanowie, jaką pokonałbym jadąc autem lub rowerem (trasy te mogą różnić się długością), wyliczam w programie ArcGIS rysując krzywą łamaną na fotomapie Warszawy.

Porównując wyniki otrzymane na ortodromie i na prostej w $\mathbb{R}^2$, zauważam, iż błąd, jaki popełniam nie jest duży (ok. 5 m). Bierze się to z tego, iż odległość między rozważanymi obiektami jest niewielka. W praktyce dla obszarów o średnicy ok. 10 km zniekształcenie, wywołane odwzorowaniem powierzchni kuli na płaszczyźnie jest tak znikome, że zrzutowane obszary przyjmuje się jako płaskie.

Zajmę się teraz drugim poleceniem zadania. Odległość dwóch miejsc w Warszawie (*A* i *B*), których współrzędne wynoszą $A = (\lambda_1, \phi), B = (\lambda_2, \phi)$, przedstawiam w trzech metrykach. Zauważam, że punkty *A* i *B* leżą na tym samym równoleżniku. Wyliczam szukane odległości:

$$d_{R^2}(\lambda, \phi) = \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\phi - \phi)^2} = |\lambda_2 - \lambda_1| \text{ km}$$
$$d_T(\lambda, \phi) = |\lambda_2 - \lambda_1| + |\phi - \phi| = |\lambda_2 - \lambda_1| \text{ km}$$
$$d_M(\lambda, \phi) = \max(|\lambda_2 - \lambda_1|, |\phi - \phi|) = \max(|\lambda_2 - \lambda_1|, 0) = |\lambda_2 - \lambda_1| \text{ km}$$

Zatem w powyższych metrykach odległość między punktami leżącymi na jednym równoleżniku odwzorowanymi na płaszczyznę jest zwykłą odległością na prostej $\mathbb{R}$. Dla modelu trójwymiarowego jest to odległość mierzona na łuku (ortodromie), tzn. na równoleżniku między południkami przechodzącymi przez punkty *A* i *B*.

Analogicznie wyliczam odległości w zadanych metrykach dowolnych punktów przez które przechodzi Południk Warszawski, tzn. których współrzędne spełniają warunki: $\lambda_1 = \lambda_2, \phi_1 \neq \phi_2$.

Dla ortodromy otrzymuję:

$$d_L = \arccos(\sin\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2) = \arccos(\cos(\phi_1 - \phi_2)) = |\phi_2 - \phi_1|,$$

gdzie $|\phi_2 - \phi_1| \in [0, \pi]$.

Zauważam, iż zasadniczo ortodroma nie pokrywa się z loksodromą. Wyjątek stanowią równik i południki, będące jednocześnie ortodromami i loksodromami.

Podziękowania:
Piotrowi Gałązce za konsultację merytoryczną
Agacie Burczyńskiej za pomoc w opracowaniu graficznym
W tekście wykorzystano materiały ze zbiorów Żydowskiego Instytutu Historycznego
oraz Domu Spotkań z Historią, a także:
[1] E. G. Birgin, R. D. Lobato, R. Morabito „An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle", Journal of the Operational Research Society, 2010, 61, pp. 306-320 [http://lagrange.ime.usp.br/~lobato/packing/]

Maciej Falkowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechniki Warszawskiej
Praca wykonana w ramach zajęć z Varsavianistyki
e-mail: mfalk@o2.pl