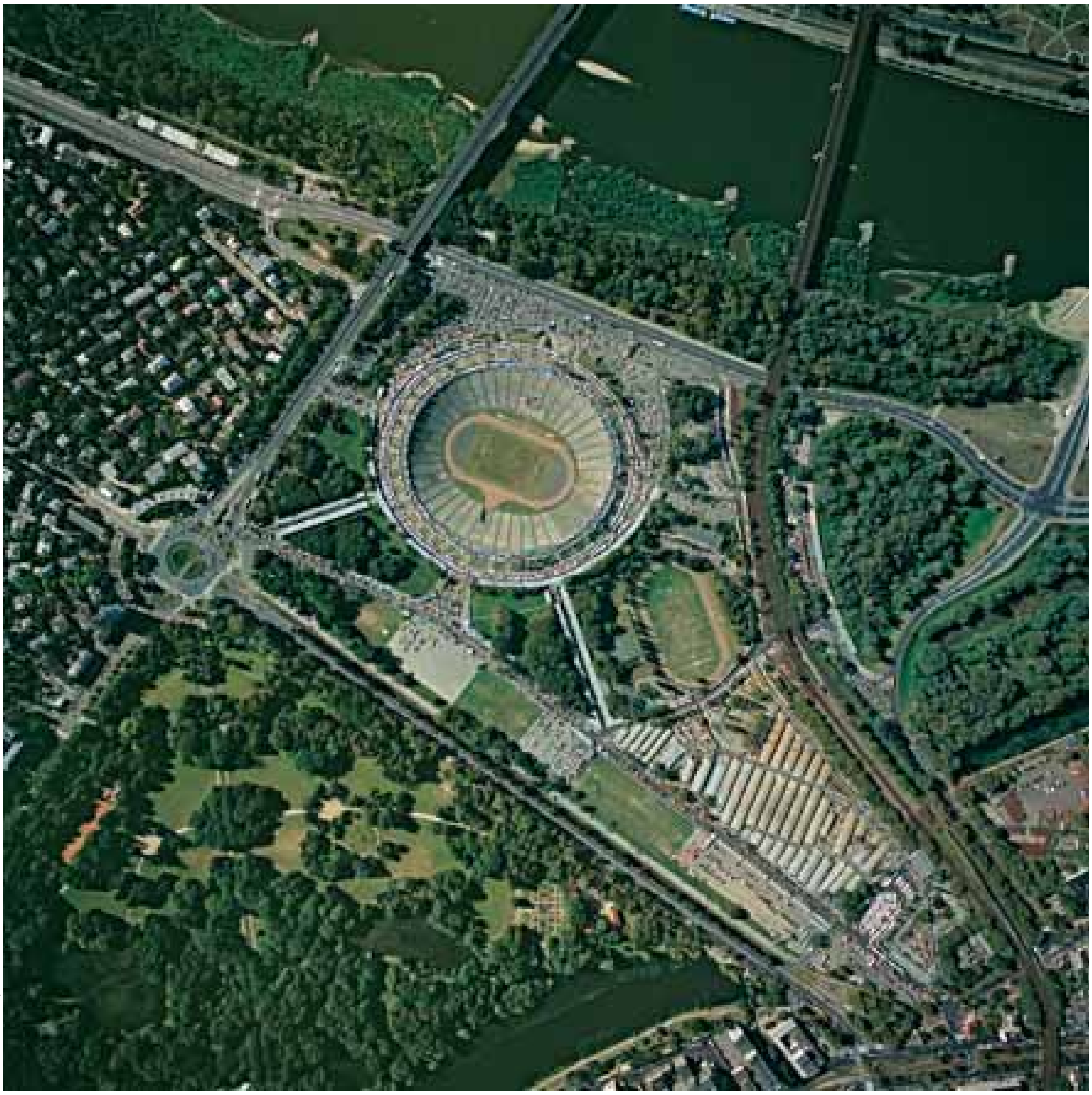
Do wykorzystania na lekcjach:
matematyki.

# Matematyczne pożegnanie Stadionu X-lecia

**Kamila Czekaj**

poziom: liceum ogólnokształcące



*Oblicze Sawy, s. 55*

### Cele lekcji

- rozwijanie umiejętności czytania obrazów i stawiania pytań
- nabywanie umiejętności matematycznego patrzenia na przestrzeń i obiekty
- przenoszenie teoretycznej wiedzy z matematyki do działań praktycznych.

### Środki dydaktyczne

- fotografia z *Tryptyku Warszawskiego*, tom *Oblicze Sawy*, s. 55)
- fotomapa Warszawy. Fotomapa jest dostępna pod adresem www.samper.pl (ortofotomapa 2001 – Obrazowa Baza Danych Varsovia.pl).

### Metody i formy pracy

- praca indywidualna pod kierunkiem nauczyciela.

## Przebieg lekcji

### WIDZĘ

Przyglądając się zdjęciu:
- dostrzegam obiekty jako formy geometryczne (linie proste, odcinki, koła, figury prostokątne i owalne etc.)
- dokonuję syntezy składowych obrazu i opisuję obraz całościowo: teren częściowo zabudowany, wraz z ulicami i rondem, fragment rzeki, dwa mosty, tereny zielone położone nad rzeką, w centrum zdjęcia dominantę stanowi stadion z płytą boiska piłkarskiego, obok stadionu boisko dodatkowe.

### ANALIZUJĘ

**1.** Interpretuję, czym są dostrzeżone na obrazie formy geometryczne, przypisując każdej nazwę rzeczywistego obiektu. Zapisuję dostrzeżone relacje w tabeli, np.: odcinek – ulica; skrzyżowanie – przecięcie prostych; okrąg – czasza stadionu, rondo; krzywa – granica między lądem a wodą rzeki, linia kolejowa; linie zbieżne promieniście – sektory stadionu.

**2.** Lokalizuję stadion na ortofotomapie Warszawy wykonanej na podstawie zdjęć najpóźniej w 2007 r. Lekcja prowadzona jest na podstawie zdjęcia stadionu X-lecia, który w międzyczasie został przebudowany. Przedstawiona lekcja ma jednak charakter uniwersalny i może być prowadzona na bazie obrazu dowolnego stadionu.

Dzięki narzędziom programu ArcGIS dokonuję interesujących mnie pomiarów: długości i szerokości, wielkości powierzchni, długości obwodów.

**3.** Nauczyciel koncentruje uwagę uczniów na stadionie i prosi o jego charakterystykę.

Z analizy zdjęcia wynika, że stadion składał się z płyty głównej (boisko do piłki nożnej otoczone pasem bieżni) oraz widowni. Uwagę zwraca organizacja widowni. Jest ona podzielona na 42 sektory (liczę je na podstawie fotografii).

Zastanawiam się:
- ile osób mieści się w jednym sektorze?
- ile osób mieści się w pierwszym rzędzie sektora?
- ile osób mieści się w poszczególnych rzędach danego sektora (np. w 12. rzędzie)?
- ile miejsc siedzących znajduje się łącznie w kilku pierwszych rzędach sektora?
- ile rzędów znajduje się w jednym sektorze?

### DZIAŁAM

**1.** Stawiam pytanie: ile miejsc siedzących znajduje się w pierwszym rzędzie?

Szukam w Internecie wskazówki, która pozwoli mi to ustalić. Określam skalę na fotografii.

Skoro boisko ma wymiary 105 m na 68 m, a na fotografii ma wymiar na przykład 2,2 cm na 1,4 cm, to skala wynosi 1:4800. Wszystkie kolejne wyliczenia będą odnosiły się do tej skali. W rzeczywistości uczeń będzie miał jednak do czynienia z innymi wymiarami (zdjęcie w albumie, zdjęcie w niniejszym opracowaniu lub zdjęcie projektowane z rzutnika na ekran podczas lekcji będą znacznie różniły się skalą).

Mierzę na fotografii pierwszy rząd sektora (około 2 mm) i obliczam przy użyciu skali, że w rzeczywistości ma on długość około 10 m. Przyjmuję, że na jedno miejsce siedzące potrzeba około 0,5 m, zatem w pierwszym rzędzie jest 20 miejsc siedzących.

**2.** Stawiam pytanie: ile miejsc siedzących znajduje się w 12. rzędzie sektora?

Przyjmijmy, że w każdym następnym rzędzie jest o jedno miejsce siedzące więcej. Zatem liczba miejsc w poszczególnych rzędach wynosi odpowiednio: 20; 21; 22; 23... Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1 = 20$ i różnicy $r = 1$. Dwunasty rząd sektora to dwunasty wyraz tego ciągu. Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

mogę wyznaczyć 12. wyraz tego ciągu

$$a_{12} = 20 + (12 - 1) \cdot 1 = 31$$

Zatem w dwunastym rzędzie jest 31 miejsc siedzących.

**3.** Stawiam pytanie: ile osób zmieści się w 12. pierwszych rzędach dowolnego sektora?

Ponieważ rzędy tworzą ciąg arytmetyczny mogę to policzyć wykorzystując wzór na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

czyli w naszym wypadku

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{20 + 31}{2} \cdot 12 = 306$$

Zatem w 12. pierwszych rzędach zmieści się 306 osób.

**4.** Stawiam pytanie: ile miejsc siedzących jest w rzędach od 12. do 21.?

Aby to obliczyć muszę od sumy 21. pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego odjąć sumę 11. pierwszych wyrazów tego ciągu, czyli

$$S_{12-21} = S_{21} - S_{11}$$

W tym celu muszę obliczyć, ile miejsc siedzących jest w pierwszych 21. rzędach danego sektora (za pomocą sposobu wykorzystanego powyżej)

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21$$

Muszę zatem policzyć 21. wyraz naszego ciągu (za pomocą wzoru z podpunktu 2)

$$a_{21} = 20 + (21 - 1) \cdot 1 = 40$$

Po podstawieniu otrzymuję:

$$S_{21} = \frac{20 + 40}{2} \cdot 21 = 630$$

Analogicznie wyliczam

$$S_{11} = 275$$

Zatem

$$S_{12-21} = 630 - 275 = 355$$

W rzędach od 12. do 21. jest 355 miejsc siedzących.

**5.** Z informacji znalezionych w internecie wiem, że wszystkich miejsc siedzących na widowni jest 71 008. Na fotografii policzyliśmy liczbę sektorów na widowni. Jest ich 42. Dla ułatwienia załóżmy, że wszystkie sektory są równe.

Stawiam pytanie: ile rzędów miejsc siedzących jest w jednym sektorze?

Wykorzystując zebrane informacje mogę obliczyć ile miejsc siedzących jest w jednym sektorze. Jest ich 1691 (71008:42 ≈ 1690,666...).

Wszystkie miejsca w sektorze są sumą $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, gdzie n jest szukaną liczbą rzędów w sektorze.

Zatem

$$S_n = 1691.$$

Wstawiając do wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wzór na $n$-ty wyraz tego ciągu, uzyskujemy następujący związek:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Podstawiam do niego swoje dane i otrzymuję równanie:

$$1691 = \frac{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$n^2 + 39n - 3382 = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $n \approx 42$ oraz $n \approx -81$.

Liczba rzędów w jednym sektorze wynosi w przybliżeniu 42.

**Kamila Czekaj**
nauczyciel matematyki
LXX Liceum Ogólnokształcące im. Aleksandra Kamińskiego
e-mail: kamilaczek@op.pl